УДК 517.988.6

ОБ АЦИКЛИЧНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

© Б. Д. Гельман

Ключевые слова: когомологии Александера-Спеньера; неподвижные точки; вполне непрерывные отображения.

Аннотация: Изучается вопрос об ацикличности множества неподвижных точек вполне непрерывного отображения, зависящего от параметра, если при близких значениях параметра отображение имеет единственную неподвижную точку.

Пусть X - метрическое пространство, $H^n(X)$ - когомологии Александера-Спеньера пространства X с коэффициентами в группе Z целых чисел. Пространство X является ацикличным, если приведенные когомологии $\overline{H}^n(X) = 0$ для любого $n \geqslant 0$.

Пусть E – банахово пространство, T – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество в E, $g : T \times [0, a] \to E$ – вполне непрерывное отображение. Рассмотрим семейство отображений $g_\tau = g(\cdot, \tau) : T \to E$, $Fix(g_0)$ – множество неподвижных точек отображения g_0.

Т е о р е м а 1. *Пусть $g : T \times [0, a] \to T$ – вполне непрерывное отображение. Если для любой точки $y \in Fix(g_0)$, любого $\tau \in (0, a]$ и $\lambda \in [0, 1]$ уравнение $x = g_\tau(x) + (1 - \lambda)(y - g_\tau(y))$ имеет единственное решение, то множество $Fix(g_0)$ является ацикличным.*

Расмотрим некоторые следствия из этой теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть $g : T \to T$ – вполне непрерывное отображение. Если для любых точек $x, y \in T$ справедливо неравенство $||g(x) - g(y)|| \leqslant ||x - y||$, то множество $Fix(g) \neq \emptyset$ и ациклично.*

Изучим топологическую структуру множества $Fix(g)$, если g – абстрактный оператор Вольтерра.

Пусть $C_{[a,b]}$ - пространство непрерывных функций со значениями в R^n, $X \subset C_{[a,b]}$, $g : X \to$ $\to C_{[a,b]}$ - вполне непрерывное отображение Вольтерра, т.е. для любого $\varepsilon \in [0, b - a]$ и любых функций $x, y \in X$ из того, что $x(t) = y(t)$ для $t \in [a, a + \varepsilon]$ вытекает, что $g(x)(t) = g(y)(t)$ для $t \in [a, a + \varepsilon]$.

Обозначим $X_0 = \{x(a) \in R^n \,|\, x \in X\}$. Пусть $i : X_0 \to X$ – некоторое вложение (не обязательно непрерывное). Рассмотрим отображение $g^0 : X_0 \to R^n$, определенное условием: $g^0(h) = g(i(h))(a)$. В силу вольтерровости g отображение g^0 определено корректно.

Пусть U – ограниченное выпуклое открытое множество в пространстве $C_{[a,b]}$ такое, что множество $\overline{U}$ является регулярным; $g : \overline{U} \to U$ - вполне непрерывное вольтеррово отображение.

Т е о р е м а 3. *Если $\overline{g(U)} \subset U$, то отображение $p : Fix(g) \to Fix(g^0)$, $p(x) = x(a)$, порождает изоморфизм групп когомологий.*

Abstract: a question of acyclicity of a fixed-points set of a completely continuous mapping depending from a parameter, is studied; the feature of this parameter is that if its values are close, than our mapping has only one fixed points.

Keywords: cogomologies of Alexander-Spanier; fixed points; completely continues mappings.

[1]Это исследование поддержено РФФИ: грант №08-01-00192а.

Гельман Борис Данилович
д. ф.-м. н., доцент
Воронежский государственный университет
Россия, Воронеж
e-mail: gelman@math.vsu.ru

Boris Gelman
doctor of phys.-math. sciences, senior lecturer
Voronezh State University
Russia, Voronezh
e-mail: gelman@math.vsu.ru

УДК 517.5, 513.88

ОЦЕНКИ СНИЗУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ В ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

© Д. С. Гладких

Ключевые слова: жадные алгоритмы; пространство Марцинкевича; оценки операторов.

Аннотация: В работах А. Кордоба и П. Фернандез о расходимости жадных алгоритмов в пространствах Лебега ключевую роль играл некоторый максимальный оператор $P_n^*(x)$. В настоящем докладе рассмотрены оценки $P_n^*(x)$ в пространствах Марцинкевича.

В пионерской работе [1] о расходимости жадных алгоритмов в пространствах Лебега L^p при $1 \leqslant p < 2$ ключевую роль играл следующий максимальный оператор

$$P_n^*(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant} \left| \sum_{p \text{ простое: } \quad n < p \leqslant n+j} e^{2\pi i p x} \right|.$$

В настоящем докладе будут рассмотрены оценки оператора $P_n^*(x)$ в пространствах Марцинкевича. Приведем необходимые определения.

Пусть I есть единичный отрезок в $\mathbf{R}$ с обычной мерой Лебега. Для $f : I \to \mathbf{R}$ через $\lambda(f,\gamma)$ обозначим функцию распределения функции f: $\lambda(f,\gamma) = \mu(\{\tau : |f(\tau)| > \gamma\})$, а через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке: $f^*(\tau) = \inf\{s > 0 : \lambda(f,s) < \tau\}$. Банахово пространство X, состоящее из измеримых функций, называется идеальным, если из $g \in X$, измеримости f, и выполнения п.в. неравенства $|f(\tau)| \leqslant |g(\tau)|$, следует, что $f \in X$ и $\|f|X\| \leqslant \|g|X\|$. Идеальное пространство называется симметричным, если для $f, g \in X$ из выполнения при всех $\gamma \in \mathbf{R}_+$ неравенства $\lambda(f,\gamma) \leqslant \lambda(g,\gamma)$ следует, что $\|f|X\| \leqslant \|g|X\|$.

Опишем теперь пространство Марцинкевича $M(\varphi)$. Обозначим через W множество вогнутых функций $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}_+$, каждая из которых непрерывна, строго возрастает и обладает свойствами

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}\varphi(\tau) = \infty.$$

С каждой функцией $\varphi \in W$ связана функция $\tilde{\varphi}(\tau) = \frac{\tau}{\varphi(\tau)}$. Операция $\tilde{\varphi}$ является инволюцией на классе W.

Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из тех f, для которых конечна норма

$$\|f|M(\varphi)\| = \sup_{0<t<1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f^*(\tau)d\tau = \sup_{D \subset I} \left\{ \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |f(\tau)|d\tau \right\}.$$